LÉGKÖRI HULLÁMOK

LEÍRÁS, FIZIKAI HÁTTÉR, ALKALMAZÁS

TASNÁDI PÉTER

ELTE METEOROLÓGIAI TANSZÉK

2022. NOVEMBER

A MAGYAR TUDOMÁNY ÜNNEPE

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA · 1825 ·

Tudomány: út a világ megismeréséhez

VÁZLAT

- A légköri hullámok leírása
- A Hidro-termodinamikai egyenletrendszer (HTER)
    - Egyszerűsítések
- A megoldás matematikája
- A „nem fontos” hullámok kiküszöbölése
- **A légkör gravitációs hullámai**

- A HTER LINEARIZÁLÁSA
- KÉTDIMENZIÓS HULLÁMOK
- EHANYAGOLÁSOK (metrikus tagok, Coriolis komponensek..)

- HULLÁMMÓDUS, HULLÁMCSOPORT
- DISZPERZIÓS RELÁCIÓ

- HANGHULLÁMOK

A HTER

MOZGÁSEGYENLETEK

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla u - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla v + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla w + g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

KONTINUITÁSI EGYENL.

$$\frac{d\ln\rho}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

ADIABATA EGYENLET

$$\frac{d\ln T}{dt} = k\frac{d\ln p}{dt}$$

ÁLLAPOTEGYENLET

$$p = \rho RT$$

Szabad légkör, (súrlódásmentes)

Metrikus tagok nincsenek

Coriolis erő horizontális.

Kétdimenziós

f-sík közelítés

Adiabatikus

LINEARIZÁLÁS, KIS PERTURBÁCIÓK

Alapállapot: nyugvó,
hidrosztatikus

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g$$

Az alapállapot automatikusan kielégíti a HTER-t.
Csak kis perturbációkra kell megoldást keresni

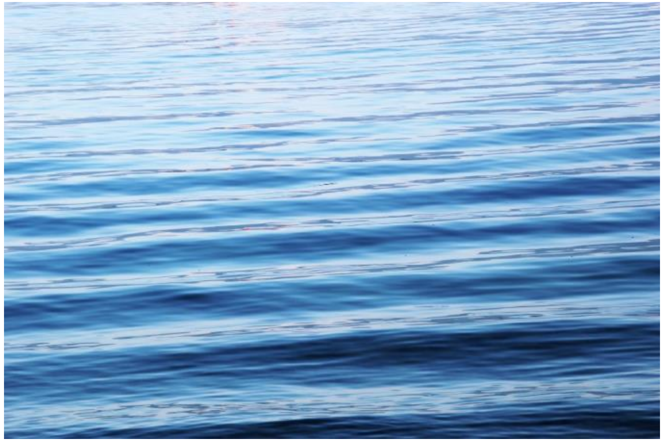
$$u = u_0(z) + u'(x,z,t)$$
$$v = v_0(z) + v'(x,z,t)$$
$$w = w_0(z) + w'(x,z,t)$$
$$p = p_0(z) + p'(x,z,t)$$
$$\rho = \rho_0(z) + \rho'(x,z,t)$$
$$\theta = \theta_0(z) + \theta'(x,z,t)$$

A perturbációkban másodrendű mennyiségeket elhanyagoljuk

Az advektív és konvektív tagok eltűnnek

$$u = u'(x,z,t)$$
$$v = v'(x,z,t)$$
$$w = w'(x,z,t)$$
$$p = p_0(z) + p'(x,z,t)$$
$$\rho = \rho_0(z) + \rho'(x,z,t)$$
$$\theta = \theta_0(z) + \theta'(x,z,t)$$

Valóság és leírás



$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla u - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla v + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla w + g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{p'}{\rho_0}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' = 0$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{p'}{\rho_0} - B\frac{p'}{\rho_0} - \frac{\theta'}{\theta_0}g = 0$$

LINEARIZÁLT EGYENLETEK

A linearizációval nem veszítünk megoldástípust és új megoldást sem kapunk

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{p'}{\rho_0}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' = 0$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{p'}{\rho_0} - B\frac{p'}{\rho_0} - \frac{\theta'}{\theta_0} g = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{w'}{H_0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right) + Bw' = 0$$

Stat. stab. par.

$$B(z) = \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial z}$$

Sűrűségi skála

$$\frac{1}{H_0(z)} = -\frac{\partial \ln \rho_0(z)}{\partial z}$$

Brunt-Väisälä frek

$$N^2 = gB$$

MEGOLDÁS:

egyetlen hullámmódus

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ p' \\ \dfrac{\theta'}{\theta_0} = \vartheta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}(z) \\ \hat{v}(z) \\ \hat{w}(z) \\ \hat{p}(z) \\ \hat{\vartheta}(z) \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$$

Teljes megoldás Fourier sor (integrál)

GREENE „TRÜKKJE"

Nyomkövető kapcsolók a HTER-ben

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{p'}{\rho_0}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' = 0$$

$$n_4\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{p'}{\rho_0} - n_3 B\frac{p'}{\rho_0} - g\frac{\theta'}{\theta_0} = 0$$

$$n_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} - n_1\frac{w'}{H_0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta'}{\theta_0}\right) + Bw' = 0$$

az n paraméterek értéke 1, vagy 0

n_1 A vertikális sebesség kontinuitást biztosító szerepe

n_2 Az összenyomhatóság

n_3 A felhajtóerő perturbáció

n_4 A nemhidrosztatikusság

Megoldható, de a megértéshez a speciális esetek kellenek, amit a kapcsolókkal választunk meg

MEGOLDÁS I.

Karakterisztikus egyenletrendszer

$$\frac{\partial}{\partial x} \to ik \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$$

$$-i\omega\hat{u} - f\hat{v} + ik\frac{\hat{p}}{\rho_0} = 0$$

$$-i\omega\hat{v} + f\hat{u} = 0$$

$$-n_4 i\omega\hat{w} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\hat{p}}{\rho_0} - n_3 B\frac{\hat{p}}{\rho_0} - \hat{\vartheta}g = 0$$

$$-n_2 i\omega\left(\frac{\hat{\rho}}{\rho_0}\right) + ik\hat{u} + \frac{d\hat{w}}{dz} - n_1\frac{\hat{w}}{H_0} = 0$$

$$-i\omega\hat{\vartheta} + B\hat{w} = 0$$

Változók:

$$\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{p}(z), \hat{\rho}(z), \hat{\vartheta}(z)$$

Átrendezés:

egyetlen másodrendű közönséges diff. egyenlet

$$\hat{w}(z)$$

MEGOLDÁS II.

$$\omega\left\{\frac{\mathrm{d}^2\hat{w}(z)}{\mathrm{d}z^2}+\left[B(n_2-n_3)-\frac{n_1}{H_0}\right]\frac{\mathrm{d}\hat{w}(z)}{\mathrm{d}z}+\left[(gB-n_4\omega^2)\left(\frac{k^2}{\omega^2-f^2}-\frac{n_2}{c^2}\right)-Bn_3\left(Bn_2-\frac{n_1}{H_0}\right)\right]\hat{w}(z)\right\}=0$$

$\omega=0$ Nem hullámok, a sebességfluktuációhoz tartozó geosztrofikus mozgás

$\hat{w}(z)\equiv 0$ Lamb hullámok

$\omega\neq 0$ $\hat{w}(z)\neq 0$

A megoldás

$$\hat{w}(z)=Ke^{imz}e^{-\frac{1}{2}\left[B(n_2-n_3)-\frac{n_1}{H_0}\right]z}$$

$$w'=Ke^{-\frac{1}{2}\left[B(n_2-n_3)-\frac{n_1}{H_0}\right]z}e^{i(kx+mz-\omega t)}$$

DISZPERZIÓS RELÁCIÓ

A karakterisztikus egyenletrendszer determinánsának eltűnéséből összefüggés adódik a hullámszám-vektor koordinátái (k, m) és a körfrekvencia között ω

$$m^2 = \left(gB - n_4\omega^2\right)\left(\frac{k^2}{\omega^2 - f^2} - \frac{n_2}{c^2}\right) - Bn_3\left(Bn_2 - \frac{n_1}{H_0}\right) - \frac{1}{4}\left[B\left(n_2 - n_3\right) - \frac{n_1}{H_0}\right]^2$$

Általánosan, kapcsolók nélkül

$$(n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1)$$

$$m^2 = \frac{k^2(gB - \omega^2)}{\omega^2 - f^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{4H_0^{\;2}}$$

AKUSZTIKUS ÉS GRAVITÁCIÓS FREKVENCIÁK

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left[f^2 + c^2\left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)\right]\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4c^2\left[k^2 gB + f^2\left(m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)\right]}{\left[f^2 + c^2\left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)\right]^2}}\right]$$

Kisebb frekvenciák $-$: gravitációsak, nagyobbak: $+$ akusztikusak

A gravitációt (gB), tehetetlenséget $\left(f^2\right)$, rétegződést $\left(1/H_0^2\right)$ és összenyomhatóságot (c^2) jellemző paraméter keverve jelenik meg; tisztán gravitációs, tehetetlenségi, illetve hanghullámokról csak megfelelő közelítések esetén beszélhetünk.

SORBAFEJTJÜK

GRAVITÁCIÓS -TEHETETLENSÉGI HULLÁMOK

$$\omega_g^2 \approx \frac{c^2\left[k^2 gB + f^2\left(m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)\right]}{f^2 + c^2\left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)} \approx$$

A hullámok létrejöttét a felhajtóerő és a Coriolis-erő biztosítja

$$\approx \frac{k^2 N^2 + f^2\left(m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)}{k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_0^2}}$$

Nagy frekvenciás hullámok (tiszta gravitációs) $\omega_g \gg f$

Közepes frekvenciájú hullámok $N \gg \omega \gg f$

Alacsony frekvenciájú hullámok $\omega \approx f$

TISZTA GRAVITÁCIÓS HULLÁMOK

Kiindulás:

$$\omega_g^2 \approx \frac{k^2N^2 + f^2\left(m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)}{k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_0^2}}$$

Elhanyagolás: Coriolis hatás

$$\omega_g^2 \approx \frac{k^2N^2}{\left(k^2 + m^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)}$$

A horiz. fázissebesség maximuma adott k mellett

$$c_{x\max} = \frac{\omega}{k} = N\left(k^2 + \frac{1}{4H_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

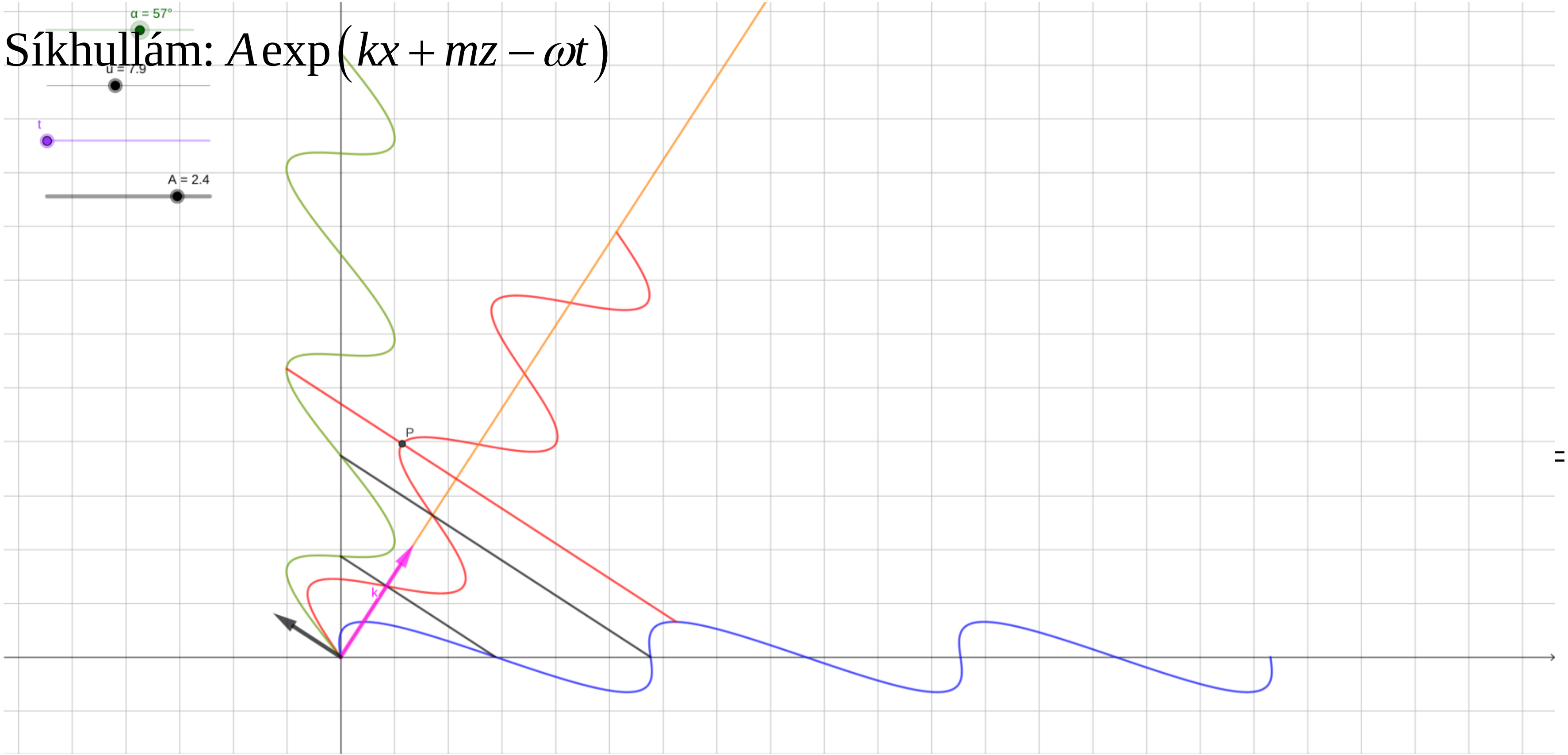
Elhanyagolás: vertikális összenyomhatóság

$$\omega_g^2 \approx \frac{k^2N^2}{k^2 + m^2}$$

A HULLÁMOK SZEMLÉLETESEN

Egyszerű lenne: x tengely a hullámterjedés irányában

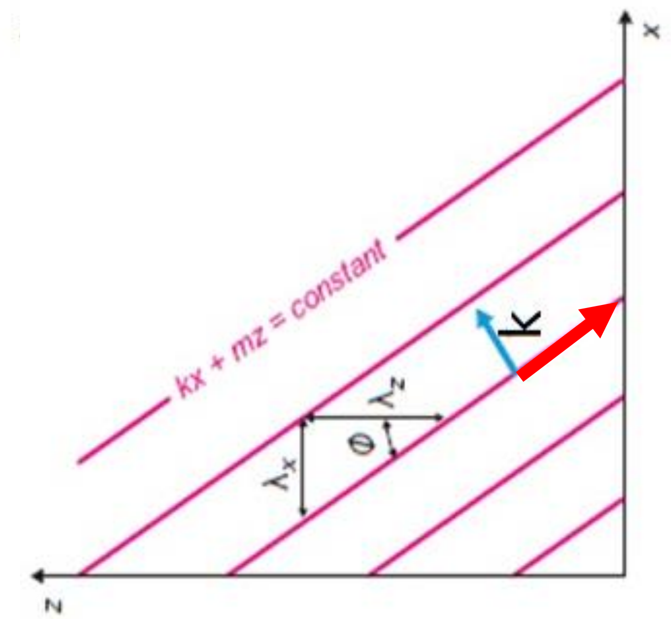
Síkhullám: $A\exp\left(kx + mz - \omega t\right)$



$= \dfrac{\omega}{m}$

GRAVITÁCIÓS HULLÁM FÁZIS- ÉS CSOPORTSEBESSÉGE

A legegyszerűbb eset



$$c_f = \frac{\omega_g}{\sqrt{k^2+m^2}} \approx \frac{kN}{k^2+m^2}$$

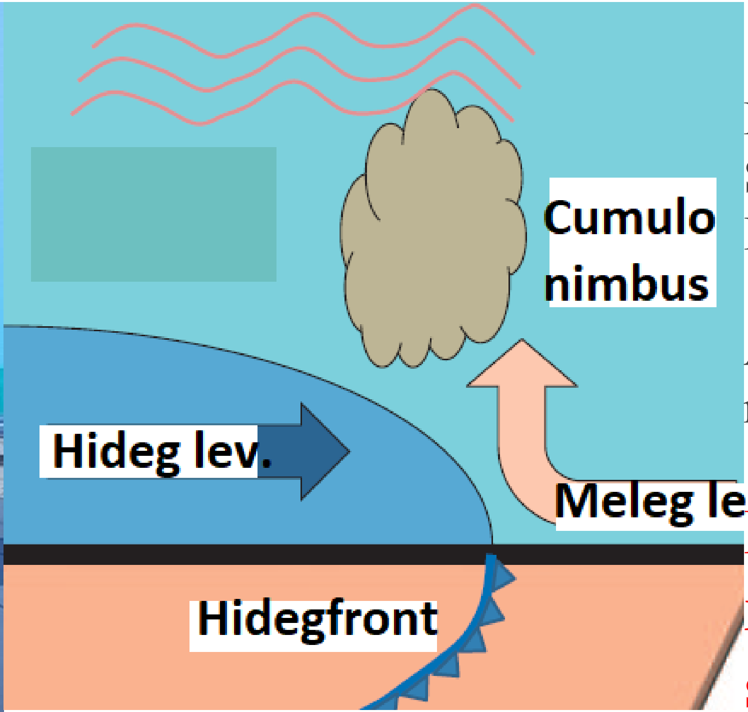
$$\frac{\mathrm{d}\omega_g}{\mathrm{d}\mathbf{k}} = \left(\frac{Nm^2}{\left(k^2+m^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-Nmk}{\left(k^2+m^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{Nm}{\left(k^2+m^2\right)^{\frac{3}{2}}}(m,-k)$$

$$\mathbf{k} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega_g}{\mathrm{d}\mathbf{k}} = 0$$

A csoportsebesség merőleges a fázissebességre

GRAVITÁCIÓS HULLÁMOK FORRÁSAI SZEREPE

Légrészek vertikális elmozdulása



Keletkezés: TROPOSZFÉRA

Hatás: SZTRATOSZFÉRA IONOSZFÉRA

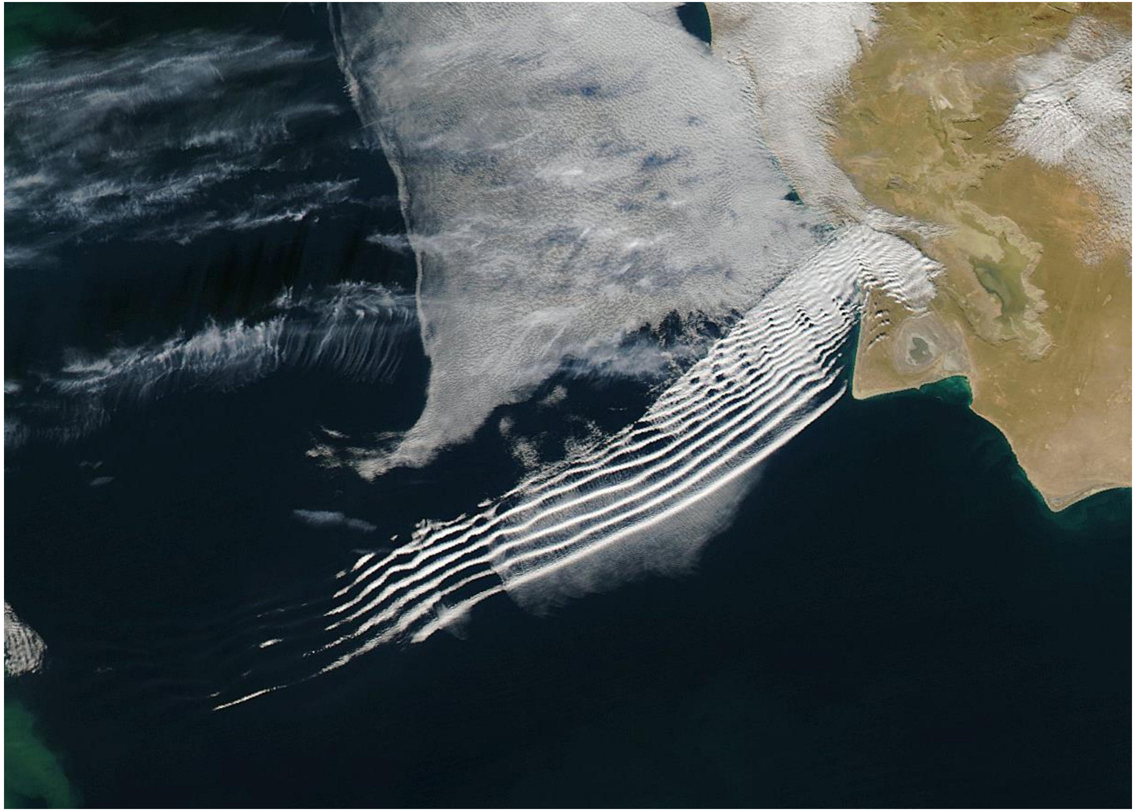
A felfelé terjedés során nő az amplitúdó

Energiát és impulzust szállítanak felfelé

Gravitációs hullámok megfigyelése

Hatásaik alapján:

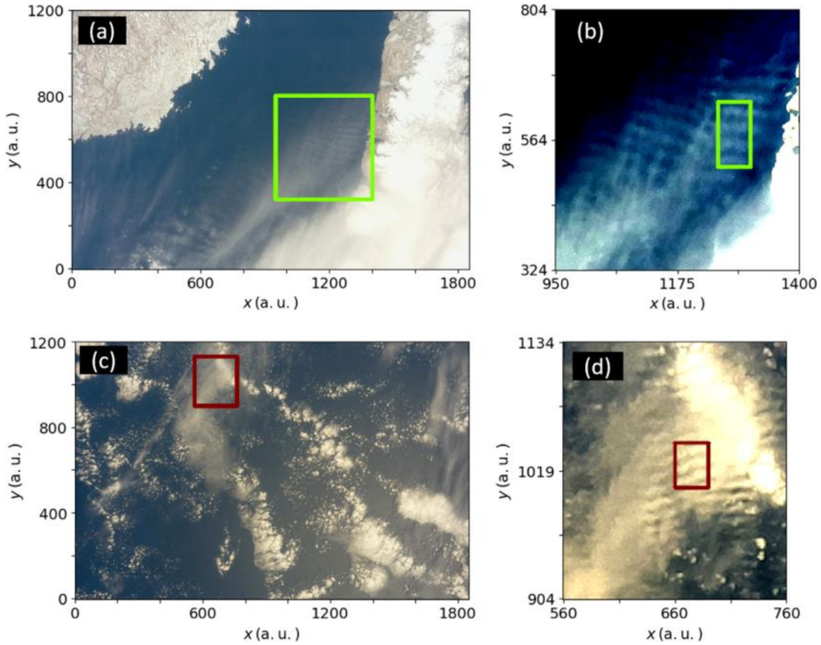
- Felhők
- Szélsebesség
- Radarkép
- Air glow

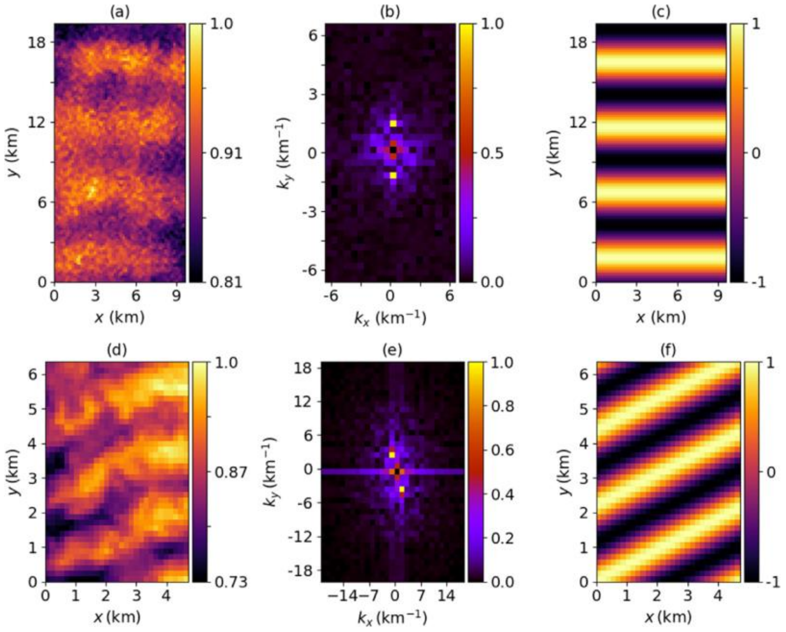


DIÁK PROJEKT

Acta Astronautica 182 (2021) 416–423

A visible camera installed on a window of the Columbus module of the International Space Station (ISS) and controlled by a Raspberry Pi computer.





IRODALOM

- John Green - Atmospheric dynamics-Cambridge University Press (1999
- Agate Untsch: Atmospheric waves

  https://ru.pinterest.com/pin/atmospheric-waves-agathe-untch-office-111--574983077416360928/
- Carmen J. Nappo: An Introduction to Atmospheric Gravity Waves, Elsevier Science, USA, 2002. ISBN: 0-12-514082-7

A MAGYAR TUDOMÁNY ÜNNEPE

Az MTA programsorozata

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA · 1825 ·

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

mta.hu

A FÁZIS- ÉS CSOPORTSEBESSÉG MERŐLEGES

GRAVITÁCIÓS HULLÁMOK MEGFIGYELÉSE